

Primer parcial de Lógica

Grado en Matemáticas

2 de noviembre de 2016

1. (2 puntos) Define relación binaria en un conjunto A . Define relación de equivalencia y de orden (definiendo, a su vez, las propiedades que caracterizan estas relaciones). Dada una relación de equivalencia R en A , define la clase de equivalencia de un elemento de $a \in A$ inducida por R y el conjunto cociente inducido por R .
2. (1 punto) Sea A el conjunto de cadenas formadas por exactamente 4 dígitos decimales (se admite que los primeros dígitos de la izquierda sean 0). Determina si las siguientes relaciones en A son de equivalencia y/o de orden:
 - a) xR_1y si y sólo si x e y comparten algún dígito.
 - b) xR_2y si y sólo si el conjunto de dígitos que componen x está contenido en el conjunto de dígitos que componen y .
3. Sea L el conjunto de las fórmulas bien construidas de la lógica proposicional.
 - a) (0,5 puntos) Define por recursión una función $b : L \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que, dada $\varphi \in L$, devuelva el número total de apariciones en φ de símbolos de conectiva binaria.
 - b) (0,5 puntos) Define por recursión una función $a : L \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que, dada $\varphi \in L$, devuelva el número total de apariciones en φ de símbolos de proposición atómica.
 - c) (1 punto) Demuestra por inducción que, para cualquier $\varphi \in L$, se cumple $a(\varphi) \leq b(\varphi) + 1$.
 - d) (Extra, más difícil, 1 punto) Determina el conjunto de fórmulas para las cuales $a(\varphi) = b(\varphi) + 1$.
4. Considera las siguientes oraciones:
 - Oración 1: “La piedra es grande sólo si es azul o dura.”
 - Oración 2: “Si la piedra no es azul o no es dura entonces no es grande.”
 - a) (0,5 puntos) Formalízalas mediante lógica proposicional. Elige proposiciones atómicas lo más sencillas posibles.
 - b) (1,5 puntos) Dadas las fórmulas del apartado anterior, φ_1 y φ_2 , determina justificadamente si cada una de ellas es consecuencia lógica de la otra, es decir, si $\varphi_1 \models \varphi_2$ y si $\varphi_2 \models \varphi_1$.
5. (1,5 puntos) Demuestra la siguiente equivalencia de fórmulas utilizando el sistema de Gentzen. Recuerda que para ello tendrás que probar dos deducciones. Utiliza sólo las 8 reglas básicas del sistema.

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

6. (1,5 puntos) Prueba la siguiente deducción utilizando el sistema de Gentzen. Puedes usar libremente las reglas básicas y las reglas auxiliares incluidas en el formulario, así como el teorema de la deducción.

$$\{p \rightarrow q \vee r, \neg(r \wedge p), \neg p \rightarrow s, \neg s \vee q\} \vdash q$$